רשימת נוסחאות עבור החלק האינטגרלי של הקורס

אינטגרל כפול

אינטגרל כפול על תחום פשוט לפי y

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

אינטגרל כפול על תחום פשוט לפי x

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d,\ \ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

$$D,E\subset\mathbb{R}^2$$
$$T(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big):E\to D$$
$$J_T(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)=\det\begin{pmatrix}x'_u(u,v) & x'_v(u,v)\\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v)\end{pmatrix}$$
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_E f\big(T(u,v)\big)|J_T(u,v)|dudv=\iint\limits_E f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\det\begin{pmatrix}x'_u(u,v) & x'_v(u,v)\\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v)\end{pmatrix}\right|dudv$$

אינטגרל משולש

שיטת המוטות (כל הגרסאות)

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2,\ \ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,z)\in D\subset\mathbb{R}^2,\ \ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dxdz$$

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (y,z)\in D\subset\mathbb{R}^2,\ \ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dydz$$

שיטת החתכים\פרוסות (כל הגרסאות)

תהי $V \subset \mathbb{R}^3$. נגדיר

$$V(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in V\}$$
$$V(y) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in V\}$$
$$V(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in V\}$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ (y,z) \in V(x)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint\limits_{V(x)} f(x,y,z)dydz \right) dx$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le y \le d,\ (x,z) \in V(y)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left(\iint\limits_{V(y)} f(x,y,z)dxdz \right) dy$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e \le z \le f,\ (x,y) \in V(z)\}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \left(\iint\limits_{V(z)} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

$$V, W \subset \mathbb{R}^3$$
$$T(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) : W \to V$$
$$J_T(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} x'_u(v,u,w) & x'_v(v,u,w) & x'_w(v,u,w) \\ y'_u(v,u,w) & y'_v(v,u,w) & y'_w(v,u,w) \\ z'_u(v,u,w) & z'_v(v,u,w) & z'_w(v,u,w) \end{pmatrix}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_W f\big(T(u,v,w)\big)|J_T(u,v,w)|dudvdw =$$
$$= \iiint\limits_W f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \left| \det \begin{pmatrix} x'_u(v,u,w) & x'_v(v,u,w) & x'_w(v,u,w) \\ y'_u(v,u,w) & y'_v(v,u,w) & y'_w(v,u,w) \\ z'_u(v,u,w) & z'_v(v,u,w) & z'_w(v,u,w) \end{pmatrix} \right| dudvdw$$

אינטגרל קווי

אינטגרל קווי מסוג ראשון

$$L:\ \overline{r}(t)=\big(x(t),y(t)\big):[a,b]\to D\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$f(x,y):D\to\mathbb{R}$$
$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int_a^b f\big(\overline{r}(t)\big)|\overline{r}'(t)|dt=\int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

$$L:\ \overline{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big):[a,b]\to V\subseteq\mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z):V\to\mathbb{R}$$
$$\int\limits_L f(x,y,z)dl=\int_a^b f\big(\overline{r}(t)\big)|\overline{r}'(t)|dt=\int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

אינטגרל קווי מסוג שני

$$L:\ \overline{r}(t)=\big(x(t),y(t)\big):[a,b]\to D\subseteq\mathbb{R}^2$$
$$\overline{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big):D\to\mathbb{R}^2$$
$$\int\limits_L \overline{F}(x,y)\cdot d\overline{r}=\int\limits_L Pdx+Qdy=\int_a^b \overline{F}\big(\overline{r}(t)\big)\cdot\overline{r}'(t)dt=\int_a^b\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$

$$L:\ \overline{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big):[a,b]\to V\subseteq\mathbb{R}^3$$
$$\overline{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big):V\to\mathbb{R}^3$$
$$\int\limits_L \overline{F}(x,y,z)\cdot d\overline{r}=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b \overline{F}\big(\overline{r}(t)\big)\cdot\overline{r}'(t)dt=$$
$$=\int_a^b\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt$$

אינטגרל משטחי

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$S:\ \overline{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big):D\subset\mathbb{R}^2\to V\subseteq\mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z):V\to\mathbb{R}$$
$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_D f\big(\overline{r}(u,v)\big)|\overline{r}'_u(u,v)\times\overline{r}'_v(u,v)|dudv=$$
$$=\iint\limits_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)|\overline{r}'_u(u,v)\times\overline{r}'_v(u,v)|dudv$$

אינטגרל משטחי מסוג שני

$$S:\ \overline{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big):D\subset\mathbb{R}^2\to V\subseteq\mathbb{R}^3$$
$$\overline{F}=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big):V\to\mathbb{R}^3$$
$$\iint\limits_S \overline{F}\cdot d\overline{\sigma}=\iint\limits_S \overline{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\iint\limits_D \overline{F}\big(\overline{r}(u,v)\big)\cdot\Big(\overline{r}'_u(u,v)\times\overline{r}'_v(u,v)\Big)dudv=$$
$$=\iint\limits_D \overline{F}\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot\det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x'_u(y,v,w) & y'_u(y,v,w) & z'_u(y,v,w)\\ x'_v(y,v,w) & y'_v(y,v,w) & z'_v(y,v,w)\end{pmatrix}dudv$$